

วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสูงสำหรับการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน

A high-order compact finite difference method for diffusion image registration

โสภิตา จิวประเสริฐ^{1*} และ นพดล ชุมชอบ¹

Sopida Jewprasert^{1*} and Noppadol Chumchob¹

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสี่ที่มีประสิทธิภาพในการแก้ระบบสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมนัยกับปัญหาการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน ร่วมกับวิธีการเดินเวลาแบบกึ่งไม่ชัดแจ้ง ผลการทดลองเชิงตัวเลขกับภาพสังเคราะห์และภาพจริงได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการเชิงตัวเลขที่ได้นำเสนอให้ความแม่นยำมากกว่าวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสองแบบมาตรฐาน

ABSTRACT

This paper presents an efficient fourth-order compact finite difference scheme to solve the associated Euler-Lagrange system derived from the variation formulation of the diffusion image registration. Combined with the semi-implicit time marching approach, numerical experiments with a range of synthetic and real test images illustrate that the proposed numerical method is more accurate than the standard second-order finite difference scheme.

Key Words: diffusion image registration, finite difference method, high-order compact finite difference scheme, standard second-order finite difference scheme, variational image registration

*Corresponding author; e-mail address: sopida.jew@hotmail.com

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม 73000

¹Department of mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University, Sanam Chandra Palace Campus, Nakhonpathom 73000

คำนำ

การลงทะเบียนภาพ คือ กระบวนการค้นหาการแปลงเรขาคณิต (geometric transformation) ซึ่งเหมาะสมที่สุดในการทำให้ภาพ 2 ภาพมีความคล้ายคลึงกันมากที่สุด (หรือ แตกต่างกันน้อยที่สุด) ภาพที่กล่าวถึงข้างต้นอาจเป็นภาพถ่ายที่ได้จากวัตถุชิ้นเดียวกันแต่ถ่ายจากเวลา หรือ มุมมองที่ต่างกัน

ในปัจจุบันการลงทะเบียนภาพทางการแพทย์ ได้แก่ ภาพรังสีเอ็กซ (x-ray) ภาพซีที (x-ray computed tomography: CT) ภาพเอ็มอาร์ไอ (magnetic resonance imaging: MRI) ภาพคลื่นเสียงความถี่สูง (ultrasound) และ ภาพอื่นๆ ที่ได้จากเครื่องมือสร้างภาพทางการแพทย์ (medical imaging devices) มีบทบาทสำคัญอย่างมากในเกือบทุกขั้นตอนการรักษาคอนไซ้ เริ่มต้นตั้งแต่ขั้นตอนการตรวจหาและการวินิจฉัยโรคจนไปถึงขั้นตอนการวางแผนการรักษาและการติดตามผลการรักษา

เมื่อไม่กี่ปีที่ผ่านมา การลงทะเบียนภาพเชิงแปรผัน (variational image registration) เป็นวิธีการสร้างภาพทางคณิตศาสตร์ (mathematical imaging technique) ที่ได้รับการยอมรับและถูกใช้อย่างแพร่หลาย เนื่องจากวิธีการนี้ให้ผลการลงทะเบียนภาพที่มีความแม่นยำสูง แนวคิดสำคัญของวิธีการนี้เริ่มต้นจากการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการลงทะเบียนภาพด้วยการพิจารณาภาพ $I: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันที่ถูกระบุโดยโดเมนภาพ (image domain) Ω การกำหนดให้เรนจ์ของภาพ $R(I) = V \subset [0, \infty)$ เพื่อระบุว่า I เป็นภาพที่มีความเข้มภาพ (image intensity) อยู่ในอัตราส่วนความเข้มภาพโทนสีเทา (gray-scaled image) นั่นคือ ภาพ I เกี่ยวข้องกับแต่ละสมาชิก $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \in \Omega$ ด้วยค่าความเข้มโทนสีเทา (gray-scaled value) $I(\mathbf{x}) \in V$ เพื่ออำนวยความสะดวกทางคณิตศาสตร์ งานวิจัยนี้จะสมมติว่า $\Omega = [0, 1]^2$ และ $V = [0, 1]$ ตามลำดับ

กำหนดให้ R แทนภาพอ้างอิง หรือ ภาพต้นฉบับ (reference image) และ T แทนภาพแม่แบบ หรือ ภาพที่ต้องการลงทะเบียน (template image) เป้าหมายของการลงทะเบียนภาพเชิงแปรผันคือการค้นหาการแปลงเรขาคณิต φ ซึ่งถูกนิยามโดย

$$\varphi(\mathbf{u})(\cdot): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\mathbf{u})(\mathbf{x}): \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

ที่ขึ้นอยู่กับ การแปลงรูป (deformation) หรือสนามการกระจัด (displacement field) ซึ่งไม่ทราบค่า

$$\mathbf{u}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{u}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

เพื่อทำให้ภาพแม่แบบซึ่งถูกแปลงพิกัดภายใต้ φ

$$T_u(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) = T \circ \varphi(\mathbf{x})$$

มีความคล้ายคลึง (หรือ มีความแตกต่าง) กับภาพอ้างอิง R มากที่สุด (หรือ น้อยที่สุด) หรือนั่นคือ $R \approx T_u$ ในบางครั้ง T_u จะถูกเรียกว่าภาพที่ได้รับการลงทะเบียน (registered image) ทั้งนี้ หลังจากได้ทำการคำนวณค่าของพิกัดใหม่ $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ ที่สมนัยกับพิกัดเดิม \mathbf{x} สำหรับทุกๆ $\mathbf{x} \in \Omega$ เป็นที่เรียบร้อยแล้ว การประมาณค่าในช่วง (interpolation) ได้แก่ การประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear interpolation) จะถูกใช้ในการประมาณค่าความเข้มภาพของ T สำหรับทุกๆ พิกัดใหม่ \mathbf{x}' นอกจากนี้ เนื่องจาก φ ได้ถูกนิยามในรูปแบบไม่อิงตัวแปรเสริม (nonparametric) ด้วยการนำฟังก์ชันเอกลักษณ์ผนวกเข้ากับการแปลงรูป \mathbf{u} (นั่นคือ $\varphi = \mathbf{Id} + \mathbf{u}$)

เพราะฉะนั้นเป้าหมายของการลงทะเบียนภาพเชิงแปรผันข้างต้นเทียบเท่าได้กับการค้นหาการแปลงรูป u ที่เหมาะสมที่สุดซึ่งทำให้ $R \approx T_u$

ต่อไปจะกล่าวถึงเครื่องมือทางคณิตศาสตร์สำหรับการตรวจวัดความแตกต่าง (dissimilarity measure) ระหว่างภาพ R และ T เริ่มต้นจากการสมมุติว่า $R, T: \Omega \rightarrow V$ เป็นภาพที่ได้จากเครื่องมือสร้างภาพชนิดเดียวกัน และภาพทั้งสองนี้มีอัตราส่วนความเข้มภาพโทนสีเทาที่สามารถเปรียบเทียบกันได้ ขอให้สังเกตว่าการกล่าวว่า "ภาพ R และ T มีความแตกต่างกันน้อยเหนือโดเมนภาพ Ω " มีความหมายเดียวกับการกล่าวว่า "ภาพ R และ T มีความคล้ายคลึงกันมากเหนือโดเมนภาพ Ω " เพราะฉะนั้นสิ่งที่ต้องการในขณะนี้คือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สามารถระบุได้ว่าเมื่อกำหนดการแปลงรูป u มาให้ ภาพ R และ T_u มีความแตกต่างกันมากหรือน้อยเป็นปริมาณที่มีขนาดเท่าใดเหนือโดเมนภาพ Ω นั่นคือ ถ้าภาพ R และ T_u ไม่มีความต่างกันเลยภายใต้การแปลงรูป u ที่กำหนดมาให้ ผลของการวัดความแตกต่างระหว่างภาพ R และ T_u ที่ได้จากเครื่องมือนี้ควรเป็นศูนย์ แต่ในทางตรงกันข้าม ถ้า ภาพ R และ T_u มีความแตกต่างกัน ผลของการวัดความแตกต่างระหว่างภาพ R และ T_u ที่ได้จากเครื่องมือนี้ควรเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์และมีค่ามากเพียงพอที่จะบ่งชี้ว่าภาพ R และ T_u เป็นภาพที่มีความแตกต่างกันมากหรือน้อย เครื่องมือทางคณิตศาสตร์นี้สามารถถูกนิยามอยู่ในรูปฟังก์ชันนัล (functional) ซึ่งส่งแต่ละสมาชิกภายในเซตของการแปลงรูปที่เป็นไปได้ U ไปยัง $[0, \infty)$ และฟังก์ชันนัลนี้มักถูกเรียกว่า ฟังก์ชันนัลความแตกต่าง (dissimilarity functional) ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย D และขอให้ตระหนักว่า $D: U \rightarrow [0, \infty)$

จากที่กล่าวถึงข้างต้นทำให้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการลงทะเบียนภาพเชิงแปรผันสามารถถูกนำเสนอได้ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\min_{u \in U} \left\{ D(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T_u(x) - R(x))^2 dx \right\} \quad (1)$$

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (1) เป็นตัวแบบดั้งเดิมที่ได้ถูกใช้อย่างแพร่หลายมาอย่างยาวนาน อย่างไรก็ตาม การแก้ปัญหาลงทะเบียนภาพด้วยการหาค่าต่ำที่สุดของ D ใน (1) ไม่สามารถรับประกันได้ว่าคำตอบของปัญหาดังกล่าวนั้นมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น เพราะฉะนั้นปัญหานี้สามารถถูกพิจารณาได้เป็นปัญหาย้อนกลับแบบอิลลิโพส (ill-posed inverse problem) การใช้เทคนิคเรกิวลารีไรซ์เซชัน (regularization technique) เพื่อแปลงให้ปัญหาลงทะเบียนภาพ (1) เป็นปัญหาแบบเวลล์โพส (well-posed problem) จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ ยิ่งไปกว่านั้นเทคนิคเรกิวลารีไรซ์เซชันจะทำหน้าที่เป็นตัวกำจัดการแปลงรูป u ที่ไม่ต้องการ หรือ ผิดปกติ (irregular) ออกไปโดยบังคับให้ u สอดคล้องกับสมบัติทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการ เช่น การบังคับให้ u เป็นการแปลงรูปที่มีความเรียบ (smoothness) เป็นต้น

เพื่อให้ได้การลงทะเบียนภาพที่รวดเร็วและได้การแปลงรูปที่มีความเรียบสูง คณะวิจัยของ Fischer และ Modersitzki (2002) ได้ปรับปรุงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (1) ดังนี้

$$\min_{u \in U} \left\{ J_{\alpha}[u] = D(u) + \alpha \bar{R}(u) \right\} \quad (2)$$

โดยที่

$$\bar{R}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_l|^2 dx \quad (3)$$

แทนเร็กกิวลารีไรเซอร์แบบดิฟฟิวชัน (diffusive regularizer) และ $\alpha > 0$ เป็นพารามิเตอร์เร็กกิวลารีไรเซอร์เซชัน (regularization parameter) ซึ่งทำหน้าที่ปรับความสมดุลระหว่างเทอมที่ใช้วัดความคล้ายคลึงระหว่างภาพ R และ T_u ซึ่งถูกตรวจวัดด้วยฟังก์ชันน้ำหนักความแตกต่าง D (1) กับเทอมที่ใช้วัดความเรียบของการแปลงรูปซึ่งถูกตรวจวัดด้วยเร็กกิวลารีไรเซอร์แบบดิฟฟิวชัน \vec{R} (3) ทั้งนี้ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (2) มักถูกเรียกว่า การลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน (diffusion image registration) นอกจากนี้ ผลและคุณภาพของการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน (2) นั้นขึ้นอยู่กับค่าเลือก α ที่เหมาะสม เนื่องจากถ้า $\alpha \rightarrow 0$ แล้วตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (2) จะใกล้เคียงกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (1) ซึ่งไม่สามารถรับประกันได้ว่าคำตอบที่ได้จะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น แต่ถ้า $\alpha \rightarrow \infty$ แล้วการแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (2) จะเน้นความสำคัญหรือให้น้ำหนักไปที่การหาค่าต่ำที่สุดของเทอมเร็กกิวลารีไรเซอร์เซชันเพียงแค่วิธีการเชิงตัวเลขซึ่งจะนำไปสู่ผลการลงทะเบียนภาพที่มีความคลาดเคลื่อนสูง ทั้งนี้ งานวิจัยนี้จะกล่าวถึงวิธีการเชิงตัวเลขที่มีความแม่นยำสูงสำหรับแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันที่ถูกระบุโดย (2) ภายใต้การตั้งค่าของพารามิเตอร์เร็กกิวลารีไรเซอร์เซชัน α เท่านั้น สำหรับรายละเอียดของการลงทะเบียนภาพเชิงแปรผันชนิดอื่นๆ สามารถศึกษาได้จาก Modersitzki (2004)

โดยทั่วไปวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน (2) สามารถแบ่งออกได้อย่างกว้างๆ 2 วิธีการ ดังนี้

- วิธีการออปติไมซ์-ดิสครีตไทซ์ วิธีการนี้เริ่มต้นจากการออปติไมซ์ (optimize) J_α ใน (2) โดยการใช้แคลคูลัสของการแปรผัน (calculus of variations) ผลที่ได้จะนำไปสู่ระบบออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange system) ซึ่งเป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นแบบร่วมกัน (system of coupled nonlinear partial differential equations) สุดท้ายจึงดิสครีตไทซ์ (discretize) ระบบออยเลอร์-ลากรางจ์เพื่อหาคำตอบโดยประมาณ (approximate solution) ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ ได้แก่ วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference method) วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) หรือ วิธีการไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume) เป็นต้น อย่างไรก็ตาม เนื่องจากโดเมนของภาพเป็นรูปสี่เหลี่ยมและค่าความเข้มภาพในระบบดิจิทัลได้ถูกกำหนดค่า ณ ตำแหน่งที่มีระยะห่างเท่าๆ กันบนโดเมนภาพทั้งในทิศทางแนวตั้งหรือทิศทางแนวนอน เพราะฉะนั้นการดิสครีตไทซ์ระบบออยเลอร์-ลากรางจ์ด้วยวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์จึงเป็นทางเลือกที่สะดวก และมีความเหมาะสมสูงกว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการไฟไนต์วอลุ่ม
- วิธีการดิสครีตไทซ์-ออปติไมซ์ วิธีการนี้เริ่มต้นจากการดิสครีตไทซ์ J_α ใน (2) โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณอินทิกรัลจำกัดเขตแบบหลายชั้นและการประมาณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite difference approximation) ผลที่ได้จะนำไปสู่ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบต่อเนื่อง (continuous optimization problem) ใน (2) ไปสู่ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบดิสครีต (discrete optimization problem) สุดท้ายจึงทำการออปติไมซ์ปัญหาแบบดิสครีตที่ได้นี้ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขพื้นฐานสำหรับการหาค่าเหมาะสมที่สุด ได้แก่ วิธีการเกาส์นิวตัน (Gauss-Newton method) หรือ วิธีการลีเวนเบิร์ก-มาร์ควาร์ดต์ (Levenberg-Marquardt method) เป็นต้น

เท่าที่คณะวิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้ามาจนถึงขณะนี้ คณะวิจัยได้พบว่ายังไม่มีคณะวิจัยใดได้พัฒนาวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสูง (high-order compact finite difference method) สำหรับเพิ่มประสิทธิภาพการแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน (2) มาก่อน งานวิจัยชิ้นนี้จะใช้วิธีการออปติไมซ์-ดิสครีตไทซ์ร่วมกับวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสูงสำหรับแก้ระบบสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมนัยกับปัญหาเชิงแปรผัน (variational problem) ใน (2) ให้มีความแม่นยำมากขึ้น

งานวิจัยชิ้นนี้ถูกจัดลำดับการศึกษาไว้ ดังนี้ ในหัวข้อที่ 2 คณะวิจัยได้นำเสนอวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสูงสำหรับการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน หัวข้อที่ 3 แสดงผลการทดลองเชิงตัวเลข บทสรุปของงานวิจัยชิ้นนี้ได้ถูกกล่าวไว้ในหัวข้อที่ 4

วิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสูงสำหรับการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน

หลังจากใช้แคลคูลัสของการแปรผันเพื่อหาค่าต่ำที่สุดของ J_α ใน (2) จะได้ระบบออยเลอร์-ลากรางจ์ซึ่งเป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นแบบรวมกันต่อไปนี้

$$\begin{cases} -\alpha\Delta u_1 + \overbrace{(T_u - R)}^{f_1(u)} \partial_{u_1} T_u = 0 \\ -\alpha\Delta u_2 + \overbrace{(T_u - R)}^{f_2(u)} \partial_{u_2} T_u = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบแบบนอยมันน์ (Neumann's boundary conditions)

$$\partial_n u_1 = \partial_n u_2 = 0 \quad \text{บน} \quad \partial\Omega \quad (5)$$

โดยที่ $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^T$ และ \mathbf{n} แทนเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับทิศทางซึ่งออกจากขอบของภาพ $\partial\Omega$ แทนที่จะทำการแก้ระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบอิลลิปติกไม่เป็นเชิงเส้นใน (4) งานวิจัยนี้จะใช้วิธีการเกรเดียนต์ดีสเซนส์ (gradient descent approach) โดยเริ่มต้นจากการแนะนำตัวแปรเวลาสังเคราะห์ $t \in [0, \infty)$ จากนั้นแก้ระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลาไม่เป็นเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \alpha\Delta u_1 = -f_1(\mathbf{u}) \\ \partial_t u_2 - \alpha\Delta u_2 = -f_2(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (6)$$

โดยที่ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ และ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))^T$ จะเข้าสู่คำตอบของ (4) เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ในการพัฒนาวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสูงสำหรับแก้ (6) Ω จะถูกดิสครีตไทซ์เป็นเมชแบบคงรูป (uniform mesh) ในแต่ละทิศทาง ดังนี้

$$x_i = (2i-1)h/2, i = 1, \dots, N; x_j = (2j-1)h/2, j = 1, \dots, N \quad (7)$$

กำหนดให้ $(u_i^k)_{i,j}^k$ แทนคำตอบโดยประมาณของ $u_i(x_i, x_j, t_k)$ โดยที่ $t_k = k\tau$ และ $\tau > 0$ เป็นขั้นเวลา (time step) หลังจากใช้วิธีการเดินเวลาแบบกึ่งไม่ชัดแจ้ง (semi-implicit time marching method) ที่คิดค้นโดยคณะวิจัยของ Fischer และ Modersitzki (2002) จะได้

$$\begin{cases} \frac{(u_1^h)_{i,j}^{k+1} - (u_1^h)_{i,j}^k}{\tau} - \alpha \Delta (u_1^h)_{i,j}^{k+1} = -f_1^h((\mathbf{u}^h)_{i,j}^k) \\ \frac{(u_2^h)_{i,j}^{k+1} - (u_2^h)_{i,j}^k}{\tau} - \alpha \Delta (u_2^h)_{i,j}^{k+1} = -f_2^h((\mathbf{u}^h)_{i,j}^k) \end{cases} \quad (8)$$

เป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิคสำหรับทุกๆ t_k เมื่อ $k = 0, 1, \dots$ และ $f_l^h(\mathbf{u}^h)_{i,j}^k = f_l^h((u_1^h)_{i,j}^k, (u_2^h)_{i,j}^k)$

เพื่อให้ได้ผลการลงทะเลียนภาพแบบดิฟฟิวชันที่มีความแม่นยำสูง งานวิจัยชิ้นนี้ได้ทำการประมาณอนุพันธ์ย่อยที่ปรากฏในสมการ (8) ด้วยรูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสี่ (fourth-order compact finite difference scheme) จะได้ว่า

$$\begin{cases} \frac{(u_1^h)_{i,j}^{k+1} - (u_1^h)_{i,j}^k}{\tau} - \alpha \Delta (u_1^h)_{i,j}^{k+1} = -F_1^h((\mathbf{u}^h)_{i,j}^k) \\ \frac{(u_2^h)_{i,j}^{k+1} - (u_2^h)_{i,j}^k}{\tau} - \alpha \Delta (u_2^h)_{i,j}^{k+1} = -F_2^h((\mathbf{u}^h)_{i,j}^k) \end{cases} \quad (9)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \Delta^h (u_l^h)_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{h^2} (4(u_l^h)_{i,j}^{k+1} + (\Sigma_1)_{i,j} (u_l^h)_{i,j}^{k+1}) + \frac{1}{6h^2} (\Sigma_2)_{i,j} (u_l^h)_{i,j}^{k+1}, \\ (\Sigma_1)_{i,j} (u_l^h)_{i,j}^{k+1} &= (u_l^h)_{i+1,j}^{k+1} + (u_l^h)_{i-1,j}^{k+1} + (u_l^h)_{i,j+1}^{k+1} + (u_l^h)_{i,j-1}^{k+1}, \\ (\Sigma_2)_{i,j} (u_l^h)_{i,j}^{k+1} &= ((u_l^h)_{i-1,j-1}^{k+1} - 2(u_l^h)_{i,j-1}^{k+1} + (u_l^h)_{i+1,j-1}^{k+1}) - 2((u_l^h)_{i-1,j}^{k+1} - 2(u_l^h)_{i,j}^{k+1} + (u_l^h)_{i+1,j}^{k+1}) \\ &\quad + ((u_l^h)_{i-1,j+1}^{k+1} - 2(u_l^h)_{i,j+1}^{k+1} + (u_l^h)_{i+1,j+1}^{k+1}) \\ F_l^h(\mathbf{u}^h)_{i,j}^k &= \frac{2}{3} f_l(\mathbf{u}^h)_{i,j}^k + \frac{1}{12} (f_l(\mathbf{u}^h)_{i-1,j}^k + f_l(\mathbf{u}^h)_{i+1,j}^k + f_l(\mathbf{u}^h)_{i,j-1}^k + f_l(\mathbf{u}^h)_{i,j+1}^k) \\ f_1(\mathbf{u}^h)_{i,j}^k &= ((T_u^h)_{i,j}^k - (R^h)_{i,j})((T_u^h)_{i+1,j}^k - (T_u^h)_{i-1,j}^k) / 2h \\ f_2(\mathbf{u}^h)_{i,j}^k &= ((T_u^h)_{i,j}^k - (R^h)_{i,j})((T_u^h)_{i,j+1}^k - (T_u^h)_{i,j-1}^k) / 2h \end{aligned}$$

เนื่องจากเรากำหนดเงื่อนไขค่าขอบแบบนอยมันน์จึงได้ว่า

$$(u_l^h)_{i,1}^k = (u_l^h)_{i,2}^k, (u_l^h)_{i,N}^k = (u_l^h)_{i,N-1}^k, (u_l^h)_{1,j}^k = (u_l^h)_{2,j}^k, (u_l^h)_{N,j}^k = (u_l^h)_{N-1,j}^k$$

หลังจากเขียนระบบสมการ (9) ในรูปเมทริกซ์-เวกเตอร์โดยใช้การจัดเรียงแบบเลกซิโคกราฟิก (lexicographic ordering) พร้อมกับละการเขียนสัญลักษณ์ 'h' และจัดรูปจะได้

$$\begin{cases} \vec{u}_1^{k+1} = (\mathbf{I} - \alpha \tau \mathbf{A})^{-1} (\vec{u}_1^{(k)} - \tau \vec{F}_1(\mathbf{u}^{(k)})) \\ \vec{u}_2^{k+1} = (\mathbf{I} - \alpha \tau \mathbf{A})^{-1} (\vec{u}_2^{(k)} - \tau \vec{F}_2(\mathbf{u}^{(k)})) \end{cases} \quad (10)$$

โดยที่ \mathbf{I} แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์และ \mathbf{A} แทนเมทริกซ์ที่ได้การประมาณอนุพันธ์ย่อยที่ปรากฏในสมการ (8) ด้วยรูปแบบดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสี่

การทดลองเชิงตัวเลข

การทดลองเชิงตัวเลขได้ถูกออกแบบเพื่อเปรียบเทียบผลการลงทะเลียนภาพแบบดิฟฟิวชันบนทั้งภาพที่ได้

จากการสังเคราะห์ (synthetic images) และภาพรังสีเอกซ์ที่เกิดจากขั้นตอนการวินิจฉัยทางการแพทย์¹ โดยใช้รูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกริดอันดับสี่ที่ได้นำเสนอในหัวข้อที่ผ่านมาและรูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสองแบบมาตรฐาน (standard second-order finite difference scheme) ที่ได้นำเสนอโดยคณะวิจัยของ Fischer และ Modersitzki (2002) เพื่อความสะดวกเราจะใช้ 'FOC' และ 'SSO' แทนวิธีการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันโดยใช้รูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกริดอันดับสี่และรูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสอง ตามลำดับ ทั้งนี้ความแม่นยำของวิธีการ FOC และ SSO จะถูกตรวจวัดโดยร้อยละของความแตกต่างสัมพัทธ์ระหว่าง R และ T_u (ภาพที่ได้รับการลงทะเบียนจากการทำซ้ำโดยวิธีการเดินเวลาแบบกึ่งไม่ชัดแจ้งในรอบการทำซ้ำครั้งที่ k) ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$\text{Re}_D = \frac{D(\mathbf{u}^{(k)})}{D(\mathbf{u}^{(0)})} \times 100 \quad (11)$$

เมื่อ $D(\mathbf{u}^{(k)}) = \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N ((R)_{i,j} - (T_u^{(k)})_{i,j})^2$ ซึ่งถ้า Re_D มีค่าน้อยๆ หมายความว่าผลการทดลองได้แสดงถึง

ความแม่นยำสูงจากการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชัน

การทดลองเชิงตัวเลขทั้งหมดได้ใช้ค่าพารามิเตอร์ $N = 256, \tau = 100, \varepsilon = 1.0 \times 10^{-12}$ และการประมาณค่าในช่วงแบบสองมิติโดยวิธีการเชิงเส้นคู่ ทั้งนี้การทำซ้ำโดยวิธีการเดินเวลาแบบกึ่งไม่ชัดแจ้งจะถูกหยุดถ้าเกณฑ์การหยุดข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) $\text{Re}_D < 1$
- 2) $|\vec{R}^{k+1} - \vec{R}^k| < \varepsilon$
- 3) $\sum_{l=1}^2 \|\alpha A \vec{u}_l^{(k)} + \vec{F}_l(\mathbf{u}^{(k)})\| / \sum_{l=1}^2 \|\alpha A \vec{u}_l^{(0)} + \vec{F}_l(\mathbf{u}^{(0)})\| < \varepsilon$ ($\|\cdot\|$ แทนยูคลิเดียนนอร์ม)
- 4) จำนวนการทำซ้ำสูงสุดมากกว่าหรือเท่ากับ 10000

นอกจากนี้ ทุกการทดลองเชิงตัวเลขได้ถูกประมวลผลด้วยโปรแกรม MATLAB R2011a ด้วยระบบปฏิบัติการ OS X Mavericks (64 บิต) บนเครื่องคอมพิวเตอร์แบบพกพา MacBook Pro CPU 2.4GHz dual-core intel Core i5 processor (Turbo Boost up to 2.9GHz) with 3MB shared L3 cache RAM 8GB of 1600MHz DDR3L

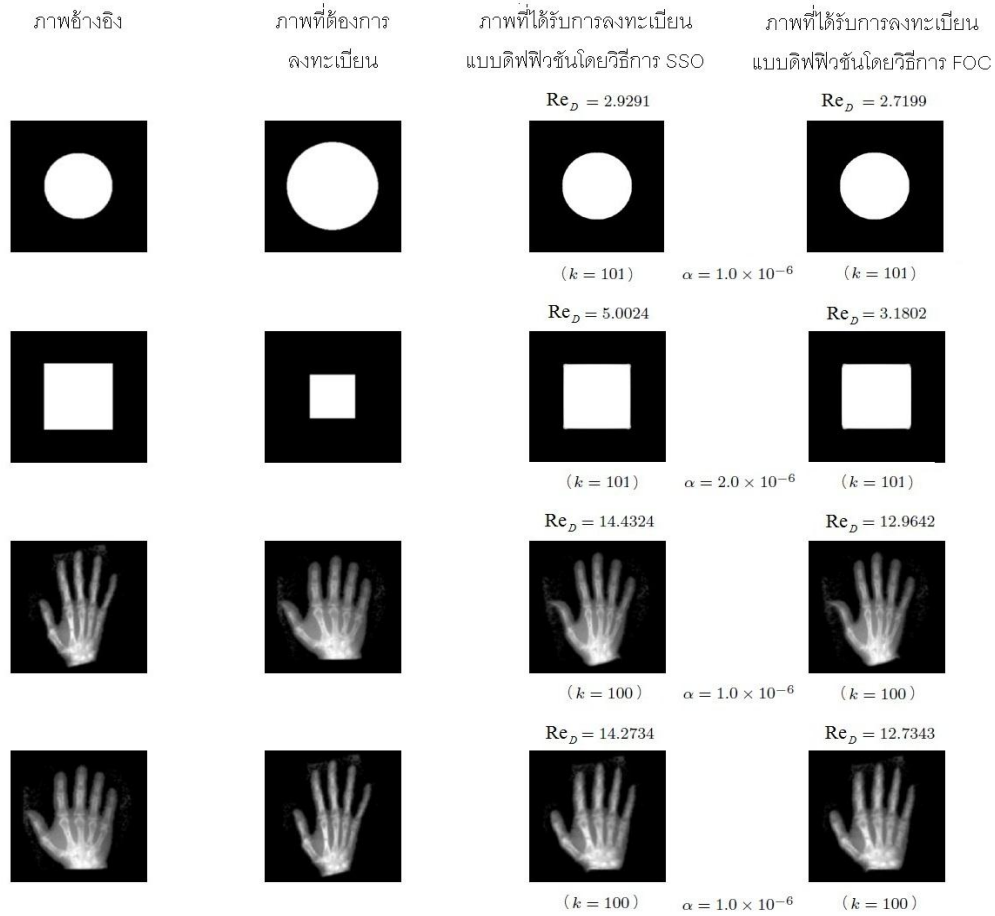
รูปที่ 1 แสดงผลการทดลองเชิงตัวเลขบนภาพที่ได้จากการสังเคราะห์ (แถวที่ 1-2) และ ภาพรังสีเอกซ์ที่เกิดจากขั้นตอนการวินิจฉัยทางการแพทย์ (แถวที่ 3-4) คอลัมน์ที่ 1-4 แสดงภาพอ้างอิง ภาพที่ต้องการลงทะเบียน ภาพที่ได้รับการลงทะเบียนแบบดิฟฟิวชันโดยวิธีการ SSO และ FOC ตามลำดับ เห็นได้จากทุกการทดลองว่าผลการลงทะเบียนภาพวิธีการ FOC และ SSO ได้ให้ภาพที่ได้รับการลงทะเบียนที่มีความคล้ายคลึงกับภาพอ้างอิงสูงมาก อย่างไรก็ตามวิธีการ FOC มีความแม่นยำในการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันที่เหนือกว่าวิธีการ SSO อย่างชัดเจน

สรุป

ในงานวิจัยชิ้นนี้ คณะวิจัยได้พัฒนาวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกริดอันดับสูงสำหรับเพิ่มประสิทธิภาพการแก้ปัญหาลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันในการแก้ระบบสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ที่สมนัยกับปัญหาดังกล่าว

¹<http://www.siam.org/books/fa06/>

ผลการทดลองเชิงตัวเลขได้ยืนยันว่าวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสูงสามารถแก้ปัญหาการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันได้เป็นอย่างดี อีกทั้งยังสามารถเพิ่มความแม่นยำในการแก้ปัญหาดังกล่าวได้ดีกว่าวิธีการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสองแบบมาตรฐานอย่างเห็นได้ชัด



รูปที่ 1 ผลการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันบนภาพที่ได้จากการสังเคราะห์ (ภาพที่แสดงไว้ในแถวที่ 1-2) และภาพรังสีเอ็กซที่ เกิดจากขั้นตอนการวินิจฉัยทางการแพทย์ (ภาพที่แสดงไว้ในแถวที่ 3-4) โดยคอลัมน์ที่ 1 แสดงภาพอ้างอิง คอลัมน์ที่ 2 แสดงภาพที่ต้องการลงทะเบียน คอลัมน์ที่ 3 แสดงภาพที่ได้รับการลงทะเบียนแบบดิฟฟิวชันโดยวิธีการ SSD และคอลัมน์ ที่ 4 แสดงภาพที่ได้รับการลงทะเบียนแบบดิฟฟิวชันโดยวิธีการ FOC

เอกสารอ้างอิง

Chumchob, N. and K. Chen. 2011. A robust multigrid approach for variational image registration models. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236: 653-674.

Fischer, B. and J. Modersitzki. 2002. Fast diffusion registration. *AMS Contemporary Mathematics, Inverse Problems, Image Analysis, and Medical Imaging* 313: 117-129.

Gupta, M. M., J. Kouatchou and J. Zhang. 1997. Comparison of second- and fourth-order discretizations for multigrid Poisson solvers. *Journal of Computational Physics* 132: 226-232.

Modersitzki, J. 2004. *Numerical methods for image registration*. Oxford University Press.

ขอขอบพระคุณข้อเสนอแนะของผู้ทรงคุณวุฒิเป็นอย่างสูง คณะวิจัยได้ทำการดำเนินการแก้ไขและชี้แจงดังนี้

1. ไม่มีเลขหน้ากำกับ

คำชี้แจง : คณะวิจัยได้ดำเนินการแก้ไขแล้ว

2. หน้า 2 ให้เขียน $T\circ\varphi(x)$ เป็น $T\circ\varphi(x)$

คำชี้แจง : คณะวิจัยได้ดำเนินการแก้ไขแล้ว

3. หน้า 3 “จริงบวก” ค่า error ควรเป็น absolute เพราะ +, - ได้ ในทางปฏิบัติ การวัดความแตกต่างเช่นใน paper นี้ ใช้ (1), (2) จึงนับเป็นค่า absolute แต่ใช้คำบรรยายที่ค่อนข้างหลวม จึงต้องตัด “จริงบวก” ออก

คำชี้แจง : คณะวิจัยได้ดำเนินการแก้ไขแล้ว

4. หน้า 7 ไม่มีการอธิบายคำย่อ ‘FOC’ และ ‘SSO’ มาก่อน

คำชี้แจง : คณะวิจัยได้ดำเนินการอธิบายข้อตกลงของสัญลักษณ์ ‘FOC’ และ ‘SSO’ ในหน้าที่ 7 บรรทัดที่ 4 จากเดิม “เพื่อความสะดวก ‘FOC’ และ ‘SSO’ จะถูกใช้แทนวิธีการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันโดยใช้รูปแบบไฟไนต์-ดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสี่และรูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสอง ตามลำดับ” แก้เป็น “เพื่อความสะดวกเราจะใช้ ‘FOC’ และ ‘SSO’ แทนวิธีการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันโดยใช้รูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบกระชับอันดับสี่และรูปแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อันดับสอง ตามลำดับ”

5. คำบรรยาย Figure 1 ควรเป็นภาษาไทย และภาพในแต่ละแถวและคอลัมน์อ่านคำบรรยายแล้วไม่เข้าใจ และแจกแจงไม่ได้ว่าภาพใดใช้วิธีใดบ้างจึงเปรียบเทียบได้ยาก

คำชี้แจง : คณะวิจัยได้ดำเนินการแก้ไขคำบรรยายได้ภาพจากภาษาอังกฤษเป็นภาษาไทย และเขียนคำอธิบายได้ภาพใหม่จากเดิม “Figure 1 The results of diffusion image registration for the synthetic images (as shown in the 1st-2nd rows) and the x-rays images (as shown in the 3rd-4th rows). The columns show the reference images, the template images, the deformed template images obtained from SSO and FOC methods, respectively” เป็น “รูปที่ 1 ผลการลงทะเบียนภาพแบบดิฟฟิวชันบนภาพที่ได้จากการสังเคราะห์ (ภาพที่แสดงไว้ในแถวที่ 1-2) และภาพรังสีเอ็กซ์ที่เกิดจากขั้นตอนการวินิจฉัยทางการแพทย์ (ภาพที่แสดงไว้ในแถวที่ 3-4) โดยคอลัมน์ที่ 1 แสดงภาพอ้างอิง คอลัมน์ที่ 2 แสดงภาพที่ต้องการลงทะเบียน คอลัมน์ที่ 3 แสดงภาพที่ได้รับการลงทะเบียนแบบดิฟฟิวชันโดยวิธีการ SSO และคอลัมน์ที่ 4 แสดงภาพที่ได้รับการลงทะเบียนแบบดิฟฟิวชันโดยวิธีการ FOC”

6. Reference ที่ 2 เป็น paper ใน series ของหนังสือ Contemporary Mathematics ควรให้ข้อมูลละเอียดกว่านี้ว่าเป็นเล่มที่เท่าใด พิมพ์ที่ใด เช่นกันกับ Reference ที่ 4

คำชี้แจง : คณะวิจัยได้ดำเนินการแก้ไขแล้ว

7. ตรวจสอบการใช้ภาษาไทย-ภาษาอังกฤษด้วย

คำชี้แจง : คณะวิจัยได้ดำเนินการตรวจสอบแล้ว